INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES
STATISTICIENS ÉCONOMISTES
A L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Mai 1984. — Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

On considère la matrice tridiagonale de taille n :

$$A_n(x) = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

et on note $u_n(x)$ son déterminant.

1° Montrer que $u_n(x)$ satisfait l'équation de récurrence :

$$u_n(x) = 2x\, u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)$$

2° En déduire l'expression de $u_n(x)$ en fonction de x, pour $|x| > 1$.

3° Que valent $u_n(1)$ et $u_n(-1)$?

4° Lorsque $|x| < 1$, on peut poser $\theta = \text{Arc cos } x$. Montrer que

$$u_n(\cos\theta) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}.$$

En déduire que les racines du polynôme $u_n(x)$ sont :

$$\xi_k^{(n)} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \quad , \quad k = 1, \ldots, n.$$

II

On se propose de chercher de manière approchée les valeurs propres $\lambda_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, n$, de la matrice Γ_n, dont la k^e ligne est :

$$(\rho^{k-1}, \rho^{k-2}, \ldots \rho, 1, \rho, \ldots \rho^{n-k-1}, \rho^{n-k}) \qquad k = 1, \ldots, n$$

où ρ est un réel strictement compris entre 0 et 1.

Sous forme développée cette matrice s'écrit :

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

1° Expliquer pourquoi la matrice Γ_n est diagonalisable et admet n valeurs propres réelles.

2° Il paraît en réalité plus simple de chercher les valeurs propres $\mu_k^{(n)}$ de la matrice $(1 - \rho^2)\,\Gamma_n^{-1}$.

a. Vérifier que cette matrice est donnée par :

$$(1-\rho^2)\,\Gamma_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

b. Comment les valeurs propres $\mu_k^{(n)}$ sont-elles reliées à celles $\lambda_k^{(n)}$ de la matrice Γ_n ? (On prendra en compte l'ordre de multiplicité de ces valeurs propres.)

3° Montrer que :

$$\det\left[(1 + 2\rho\alpha + \rho^2)\,I_n - (1 - \rho^2)\,\Gamma_n^{-1}\right] = \rho^n\,\Delta_n(\alpha)$$

où $\Delta_n(x)$ est le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 2x+\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x+\rho \end{bmatrix}$$

et où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

4° Établir l'égalité :

$$\Delta_n(x) = \rho^2\,u_{n-2}(x) + 2\rho\,u_{n-1}(x) + u_n(x)$$

5° *a.* Calculer : $\Delta_n(1)$, $\Delta_n(-1)$ et $\Delta_n[\xi_k^{(n-1)}]$ $k = 1, \ldots, n-1$.

b. Si $\alpha_k^{(n)}$ $k = 1, \ldots, n$ désignent les racines du polynôme $\Delta_n(x)$, rangées par ordre croissant, montrer que : $\alpha_k^{(n)}$ appartient à l'intervalle :

$$J_k = [\xi_{n-k+1}^{(n-1)}, \xi_{n-k}^{(n-1)}] \qquad \text{pour} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

(On fait la convention :

$$\xi_n^{(n-1)} = -1 \qquad \text{et} \qquad \xi_0^{(n-1)} = 1)$$

6° *a.* Vérifier que :

$$\xi_{n-k+1}^{(n)} \in J_k \qquad \text{pour} \qquad k = 1, \ldots, n$$

b. Calculer :

$$\Delta_n[\xi_k^{(n)}] \qquad \text{pour} \qquad k = 1, \ldots, n$$

.../...

et en déduire que : $\alpha_k^{(n)}$ appartient à l'intervalle :

$$I_k = [\xi_{n-k+1}^{(n-1)}, \xi_{n-k+1}^{(n)}] \qquad k = 1, \ldots, n$$

7° Considérer les cas extrêmes :

où ρ tend vers 0 par valeurs supérieures et où ρ tend vers 1 par valeurs inférieures.

Conclusion ?

8° Déduire des résultats précédents des encadrements des valeurs propres de la matrice Γ_n.

Vérifier que la matrice Γ_n est associée à une forme quadratique positive.

III

Une autre façon d'obtenir des approximations des valeurs propres $\mu_k^{(n)}$ consiste à considérer des matrices obtenues en perturbant $(1 - \rho^2)\,\Gamma_n^{-1}$ et pour lesquelles les valeurs propres soient facilement calculables.

On considère dans la suite les matrices M_n^δ définies par :

$$M_n^\delta = (1 - \rho^2)\,\Gamma_n^{-1} + \rho(\rho + \delta)\,E_n$$

où E_n est la matrice diagonale de taille n, admettant comme éléments diagonaux $(1, 0, 0 \ldots 0, 1)$ et où δ peut prendre les valeurs $-1, 0, +1$.

1° Montrer que les racines de :

$$\det[(1 + 2\rho\beta + \rho^2)\,I_n - M_n^\delta] = 0$$

sont les mêmes que celles de :

i. $u_n(\beta) = 0$, si $\delta = 0$

ii. $(\beta - \delta)\,u_{n-1}(\beta) = 0$, si $\delta = \pm 1$.

2° En déduire les valeurs propres $\nu_1^\delta \leqslant \ldots \leqslant \nu_k^\delta \ldots \leqslant \nu_n^\delta$ des matrices M_n^δ.

3° On note X_k^δ un vecteur propre de M_n^δ associé à la valeur propre ν_k^δ et x_{jk}^δ, $j = 1, \ldots, n$ ses coordonnées.

Montrer que ces vecteurs propres peuvent être choisis tels que :

$$a.\ x_{jk}^{-1} = \cos\left[\frac{(2j-1)(k-1)\pi}{2n}\right]$$

$$b.\ x_{jk}^{0} = \sin\left[\frac{kj\pi}{n+1}\right]$$

$$c.\ x_{jk}^{+1} = \sin\left[\frac{(2j-1)k\pi}{2n}\right]$$

(On pourra pour cela remarquer que les composantes des vecteurs propres satisfont des équations de récurrence linéaire d'ordre 2).

4° On désigne par :

$$\|X_k^\delta\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_{jk}^\delta)^2}$$

la norme euclidienne du vecteur X_k^δ.

Vérifier que :

$$a.\ \|X_1^{-1}\| = \sqrt{n}, \qquad \|X_k^{-1}\| = \sqrt{\frac{1}{2}n} \qquad \text{si} \qquad k \neq 1$$

$$b.\ \|X_k^{0}\| = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)} \qquad \forall k$$

$$c.\ \|X_k^{+1}\| = \sqrt{\frac{1}{2}n} \qquad \text{pour} \qquad k \neq n, \qquad \|X_n^{+1}\| = \sqrt{n}$$

5° De meilleures approximations des $\mu_k^{(n)}$ sont alors obtenues en calculant les quotients :

$$\eta_k^\delta = \frac{X_k^{\delta\prime}(1 - \rho^2)\,\Gamma_n^{-1}X_k^\delta}{\|X_k^\delta\|^2}$$

où le symbole $'$ désigne la transposition des matrices.

a. Montrer que :

$$\eta_k^\delta = \nu_k^\delta - \rho(\rho + \delta)\frac{[(x_{1k}^\delta)^2 + (x_{nk}^\delta)^2]}{\|X_k^\delta\|^2}$$

b. En déduire alors les expressions des approximations η_k^δ.